

Методические материалы
по курсу «Начертательная геометрия»
для работы со студентами
Института авиатехники (поток №2)

Лекция № 5.
ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ.
ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ
И ПЛОСКОСТЕЙ



Составитель Н.В. Савченко

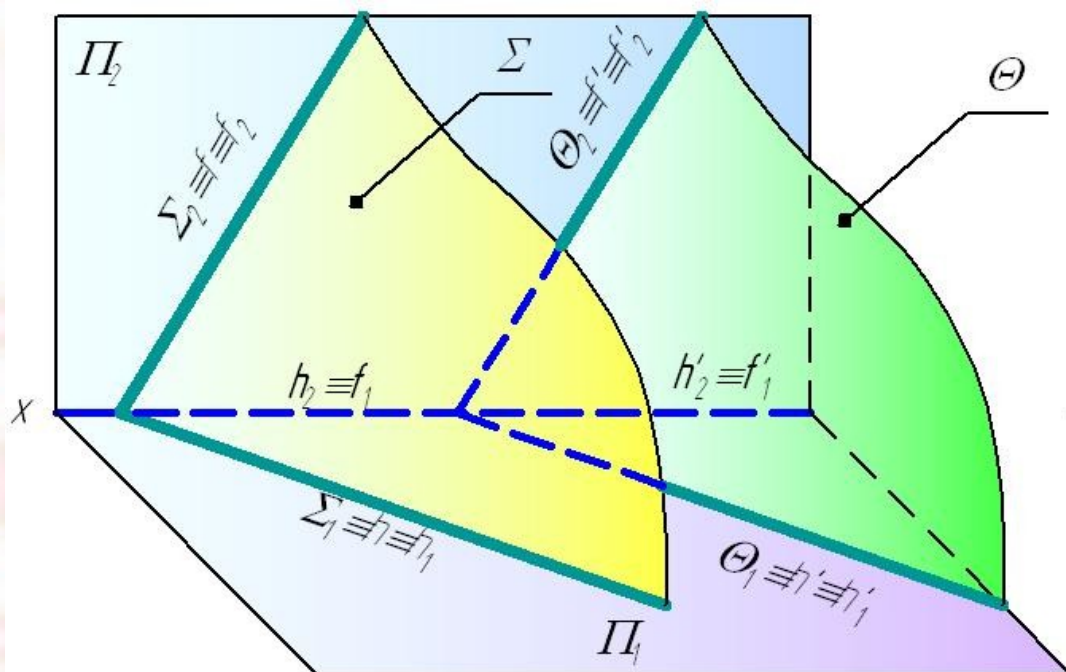
Взаимное положение плоскостей

Плоскости относительно друг друга могут занимать два положения:

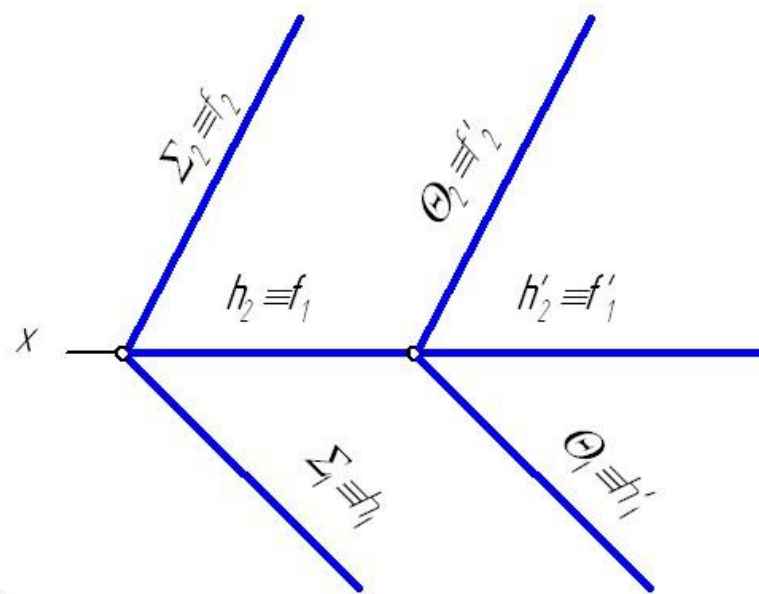
- быть параллельными;
- пересекаться.

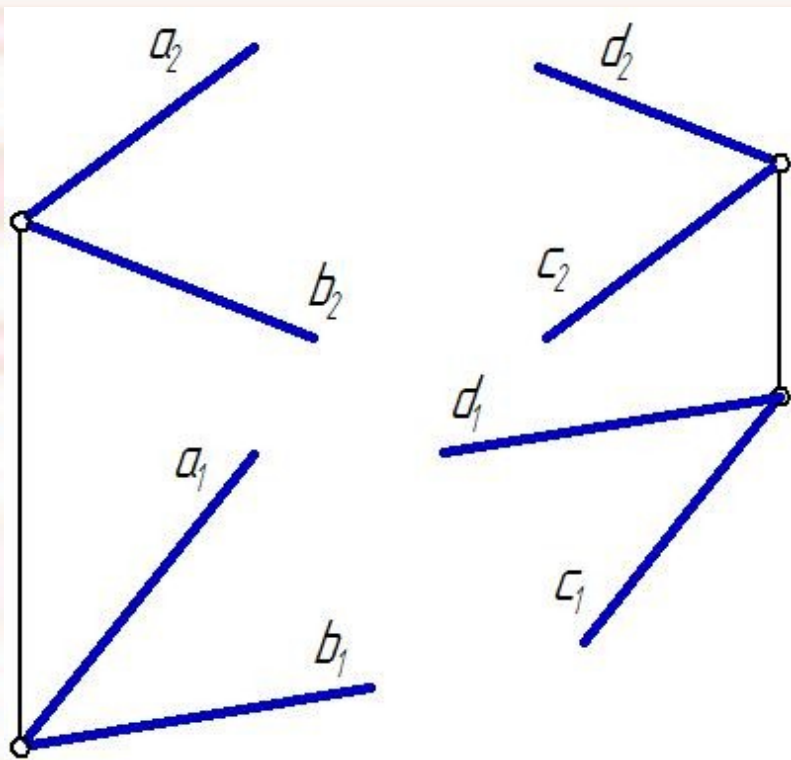
Признак параллельности плоскостей:

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым второй плоскости.



$$\Sigma(\Sigma_1, \Sigma_2) \parallel \Theta(\Theta_1, \Theta_2) \Rightarrow \begin{cases} \Sigma_1 \parallel \Theta_1 \\ \Sigma_2 \parallel \Theta_2 \end{cases}$$





$$\left. \begin{array}{l} \Sigma(a \cap b), \Theta(c \cap d) \\ a \parallel c, b \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$$

На КЧ плоскости заданы
пересекающимися прямыми.
Т.к. эти прямые попарно параллельны,
то и плоскости также параллельны.

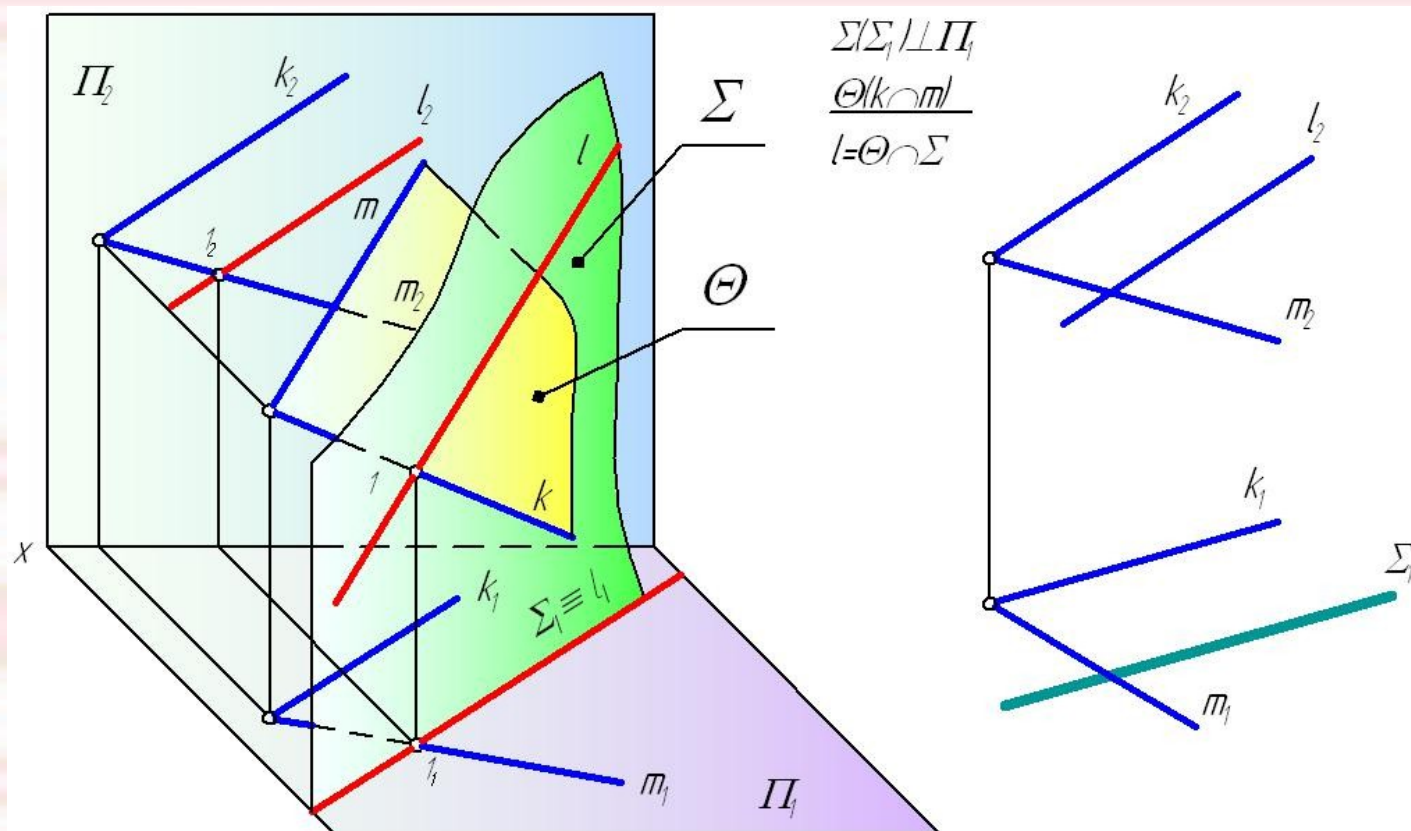
Пересечение плоскостей

Аксиома:

Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Частные случаи:

Пример 1: Пересекаются плоскость общего положения и горизонтально-проецирующая плоскость, заданная следом



Последовательность нахождения линии пересечения

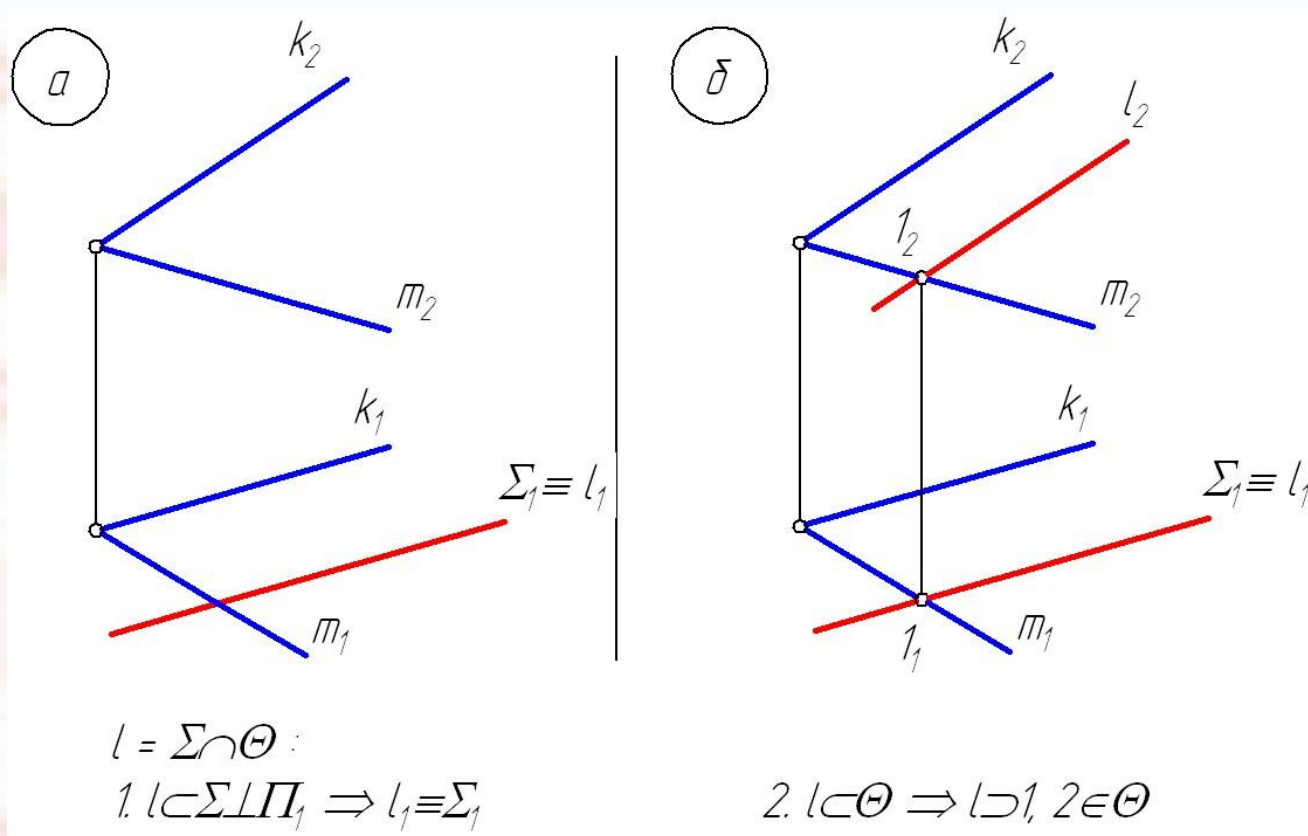
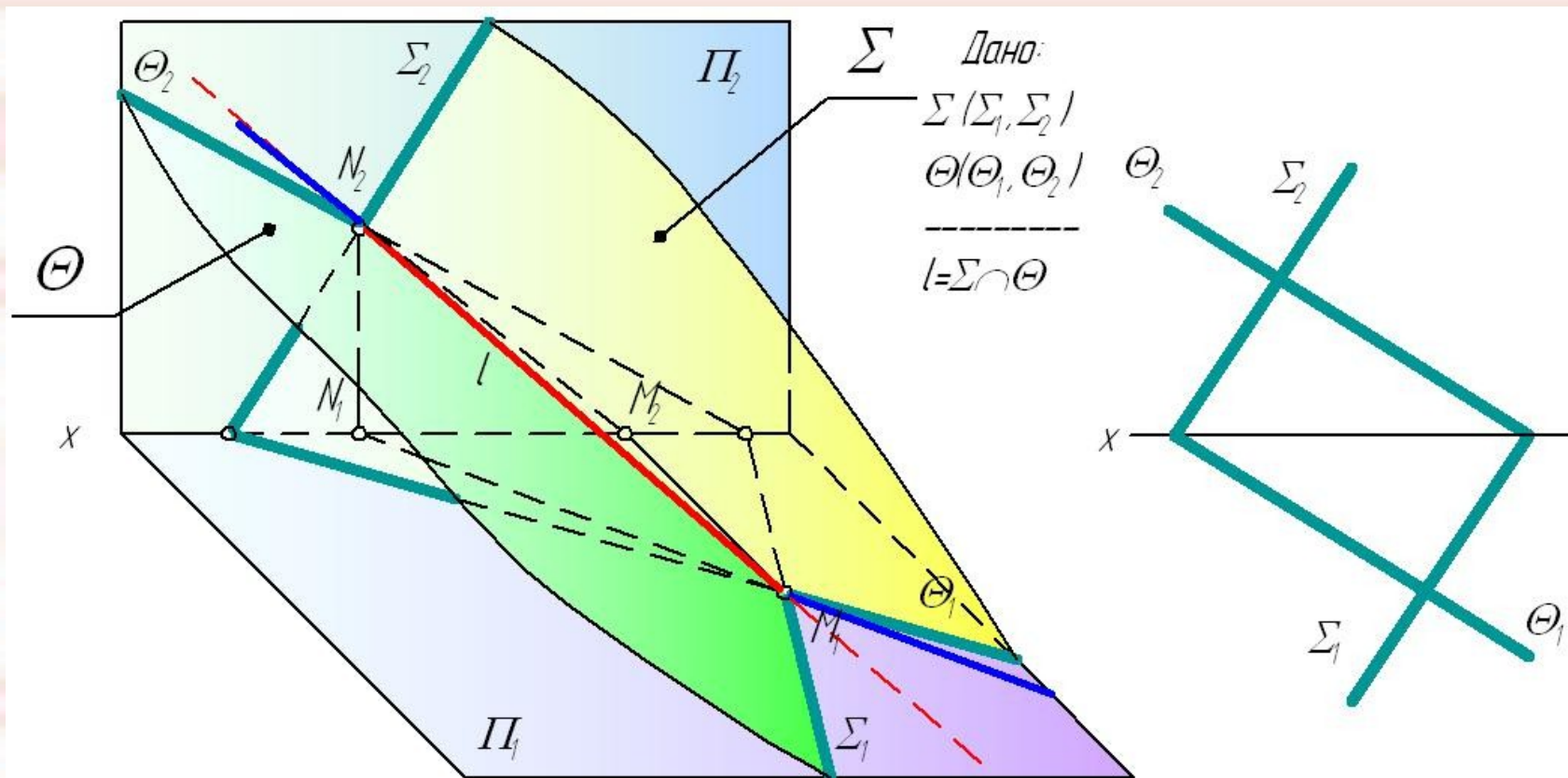


Рис. а. Горизонтальная проекция линии пересечения l определяется исходя из принадлежности ее проецирующей плоскости (совпадает со следом этой плоскости).

Рис. б. Фронтальная проекция линии пересечения определяется по принадлежности второй заданной плоскости (проходит через точку 1 и параллельна прямой k).

Пример 2: Пересекаются плоскости общего положения, заданные следами.



В этом случае следы плоскости пересекаются в пределах чертежа, следовательно, линия пересечения этих плоскостей строится по двум точкам, являющимся следами линии пересечения, которые находятся в точках пересечения одноименных следов плоскостей.

Последовательность нахождения линии пересечения

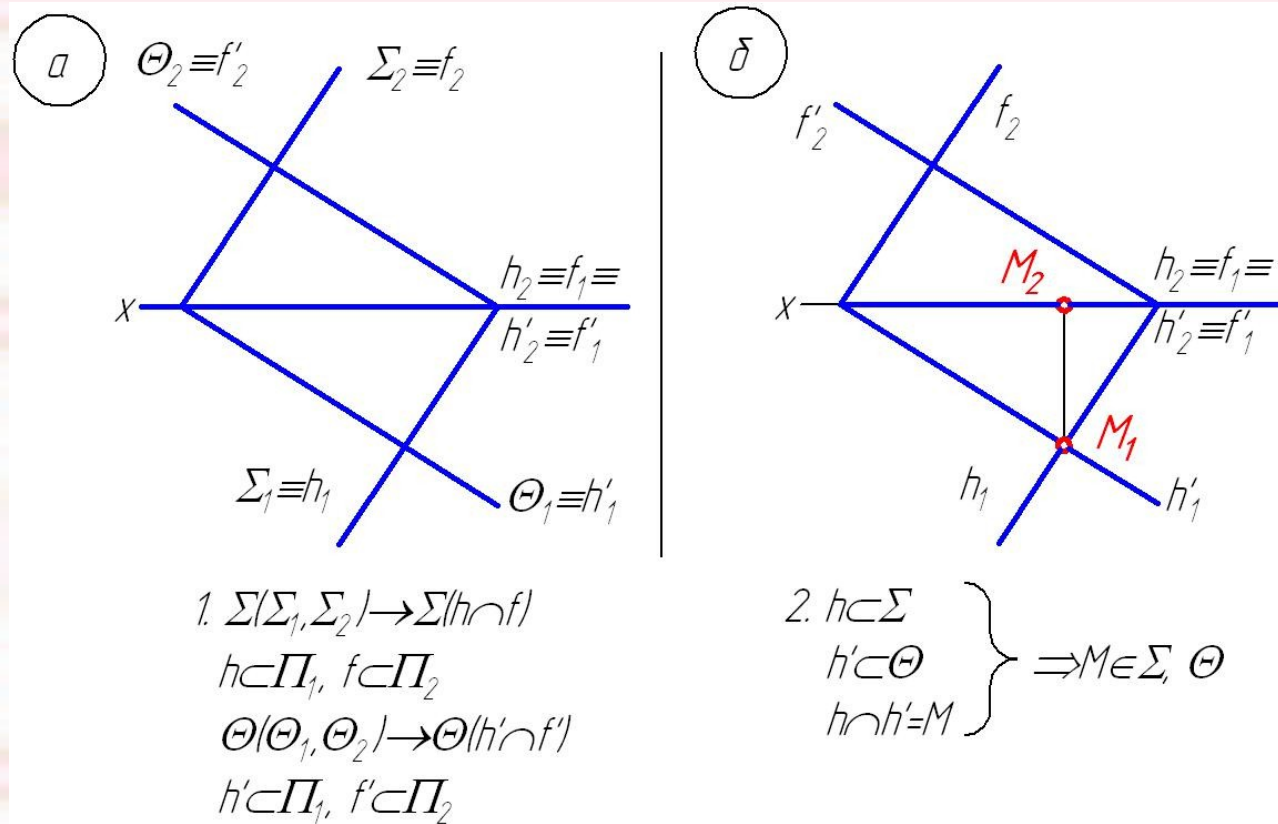


Рис. а.
Горизонтальные и фронтальные следы плоскостей и были заменены на горизонтали и фронталы нулевого уровня.

Рис. б. Определяется точка пересечения горизонталей плоскостей — точка M

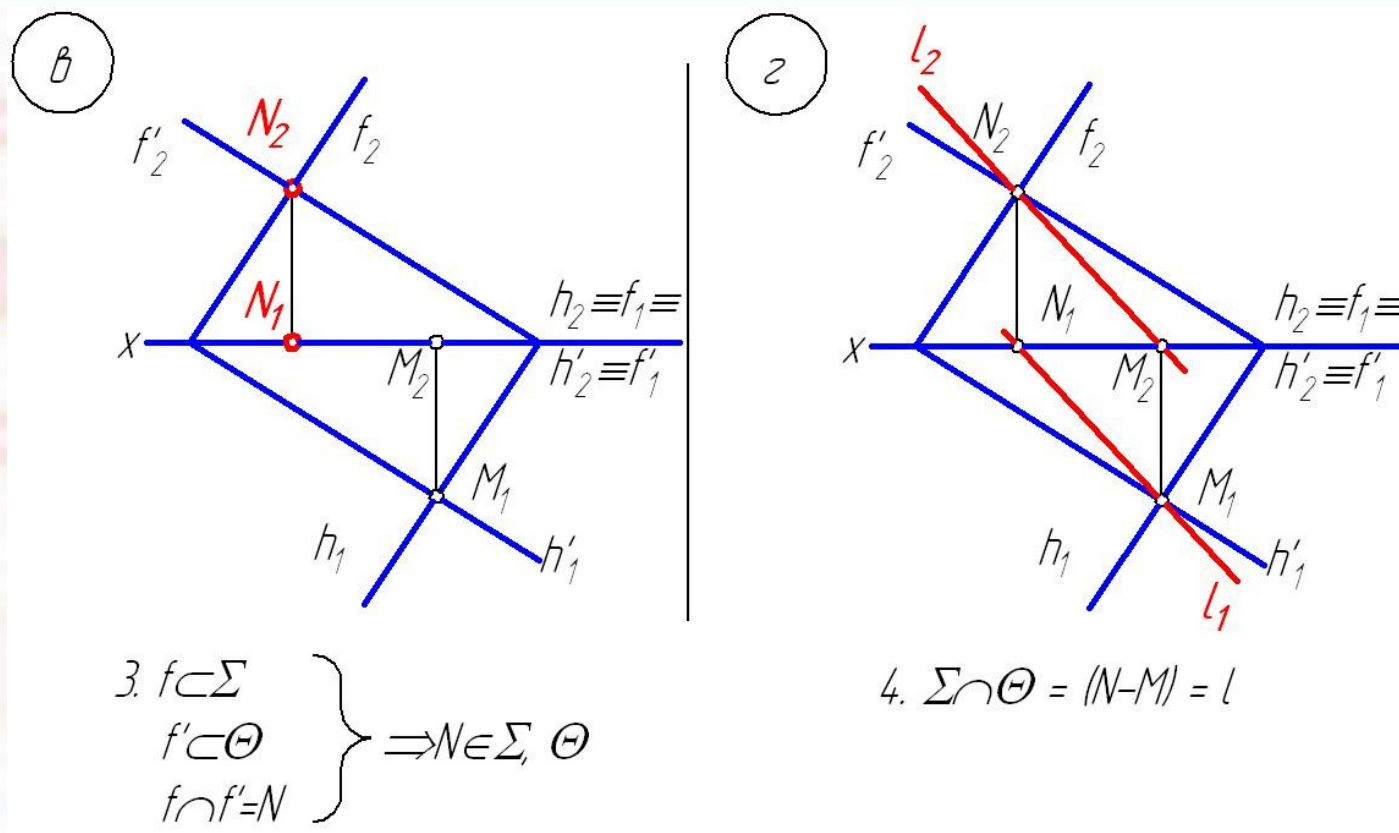


Рис. в. Определяется точка пересечения фронталей плоскостей — точка N .
 Рис. г. Точки M, N одновременно принадлежат и первой, и второй заданным плоскостям, соответственно через них проходит линия пересечения плоскостей.

Общий случай:

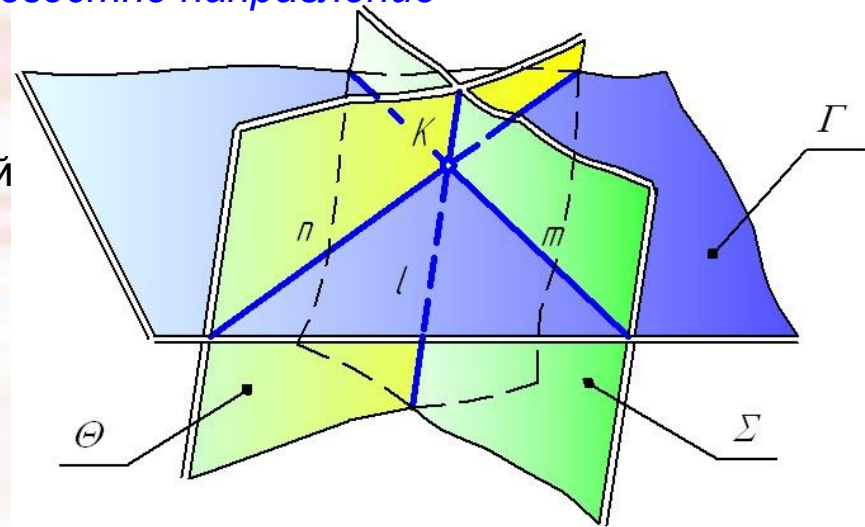
Для построения **линии пересечения плоскостей** в общем случае необходимо найти две точки одновременно принадлежащие этим плоскостям или одну общую точку, если известно направление линии пересечения.

Общая точка пересекающихся плоскостей определяется с помощью вспомогательной плоскости частного положения, также пересекающей заданные плоскости по прямым.

Направление линии пересечения

известно в том случае, если:

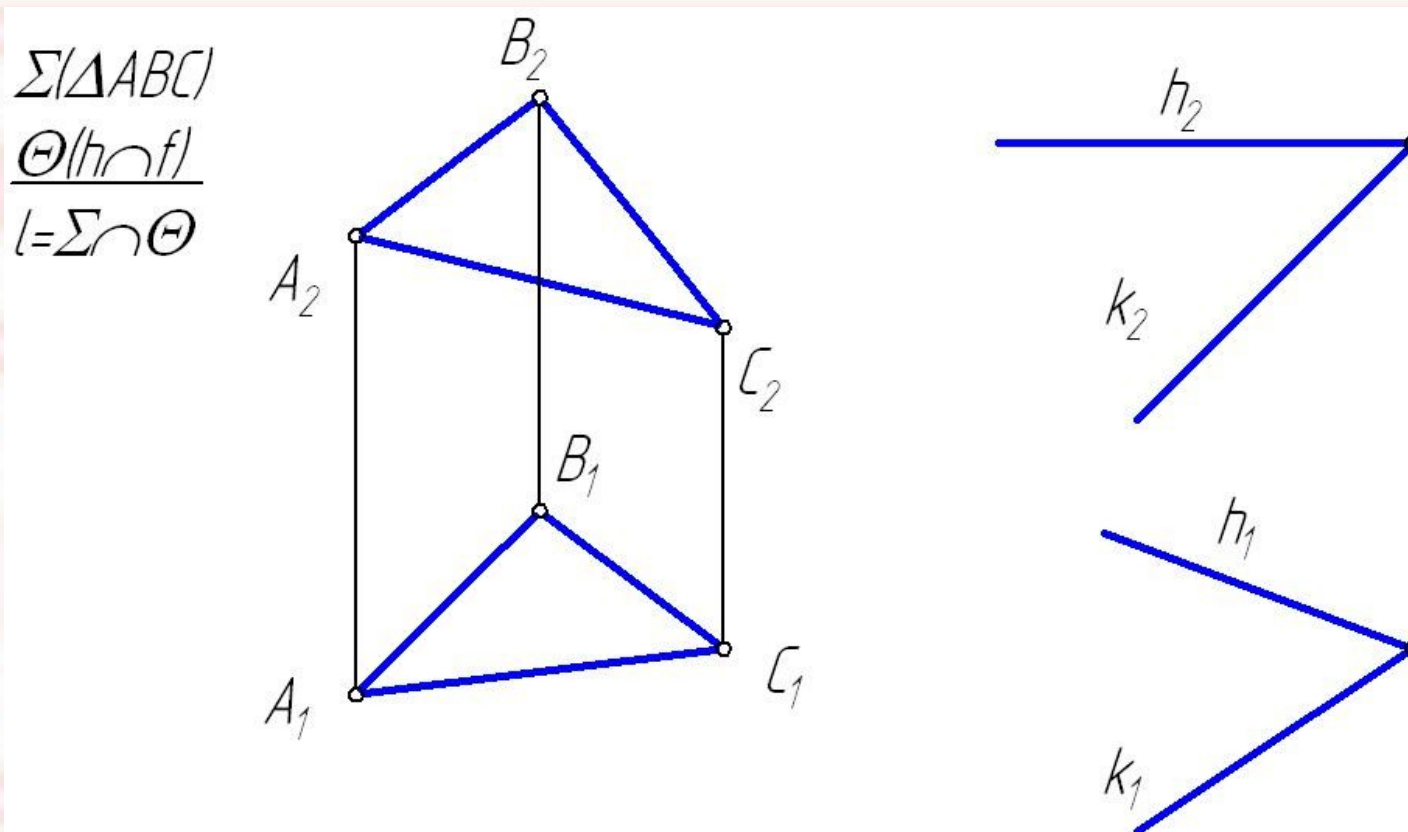
- пересекающиеся плоскости содержат взаимно параллельные прямые (линия пересечения плоскостей параллельна этим прямым);
- две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости (линия пересечения перпендикулярна этой плоскости).



Алгоритм нахождения точки линии пересечения плоскостей

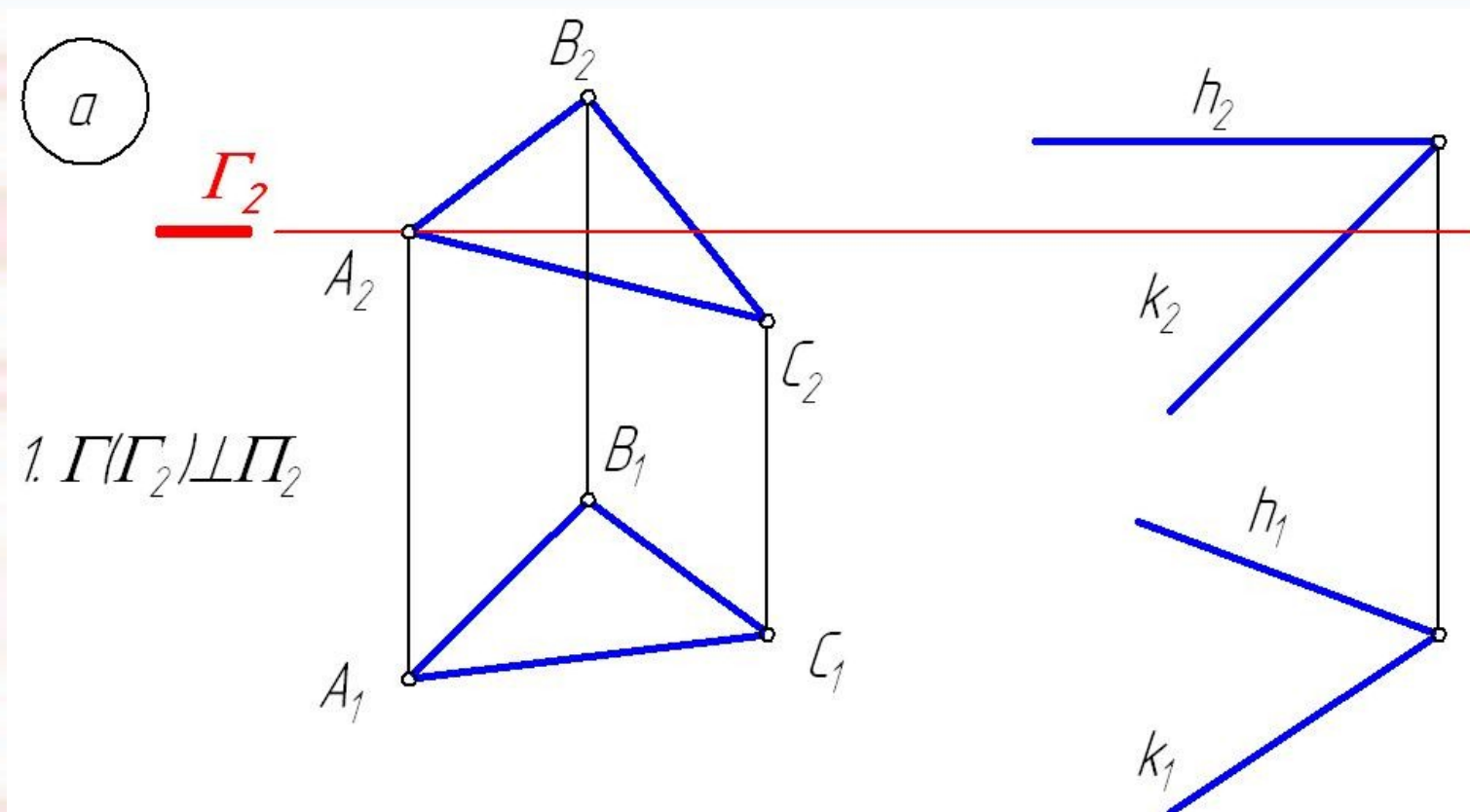
1. Выбирается дополнительная плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций (задается следом).
2. Строятся линии пересечения дополнительной плоскости с двумя заданными.
3. Находится точка пересечения линий пересечения плоскостей. Эта точка является искомой.

Пример 3: Пересекаются плоскости общего положения



Заданные плоскости общего положения не содержат взаимно параллельных прямых, поэтому необходимо найти две точки, принадлежащие линии их пересечения используя две вспомогательные плоскости.

Последовательность нахождения линии пересечения



В качестве дополнительной плоскости выбрана горизонтальная плоскость уровня Γ . Она перпендикулярна фронтальной плоскости проекций и задана фронтальным следом.

⊙

$$2. \Gamma \cap \Sigma = d$$

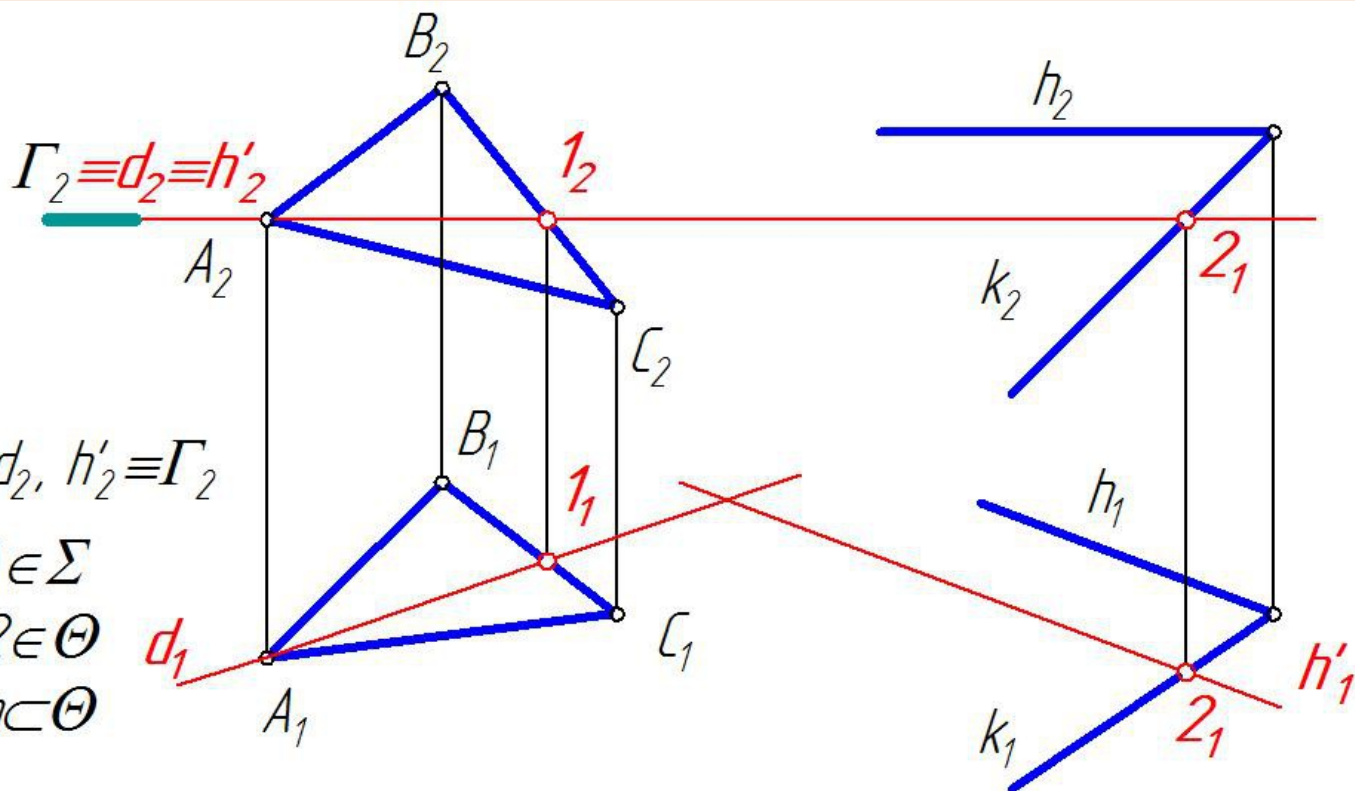
$$\Gamma \cap \Theta = h'$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) d, h' \subset \Gamma \\ \Gamma \perp \Pi_2 \end{array} \right\} \Rightarrow d_2, h'_2 \equiv \Gamma_2$$

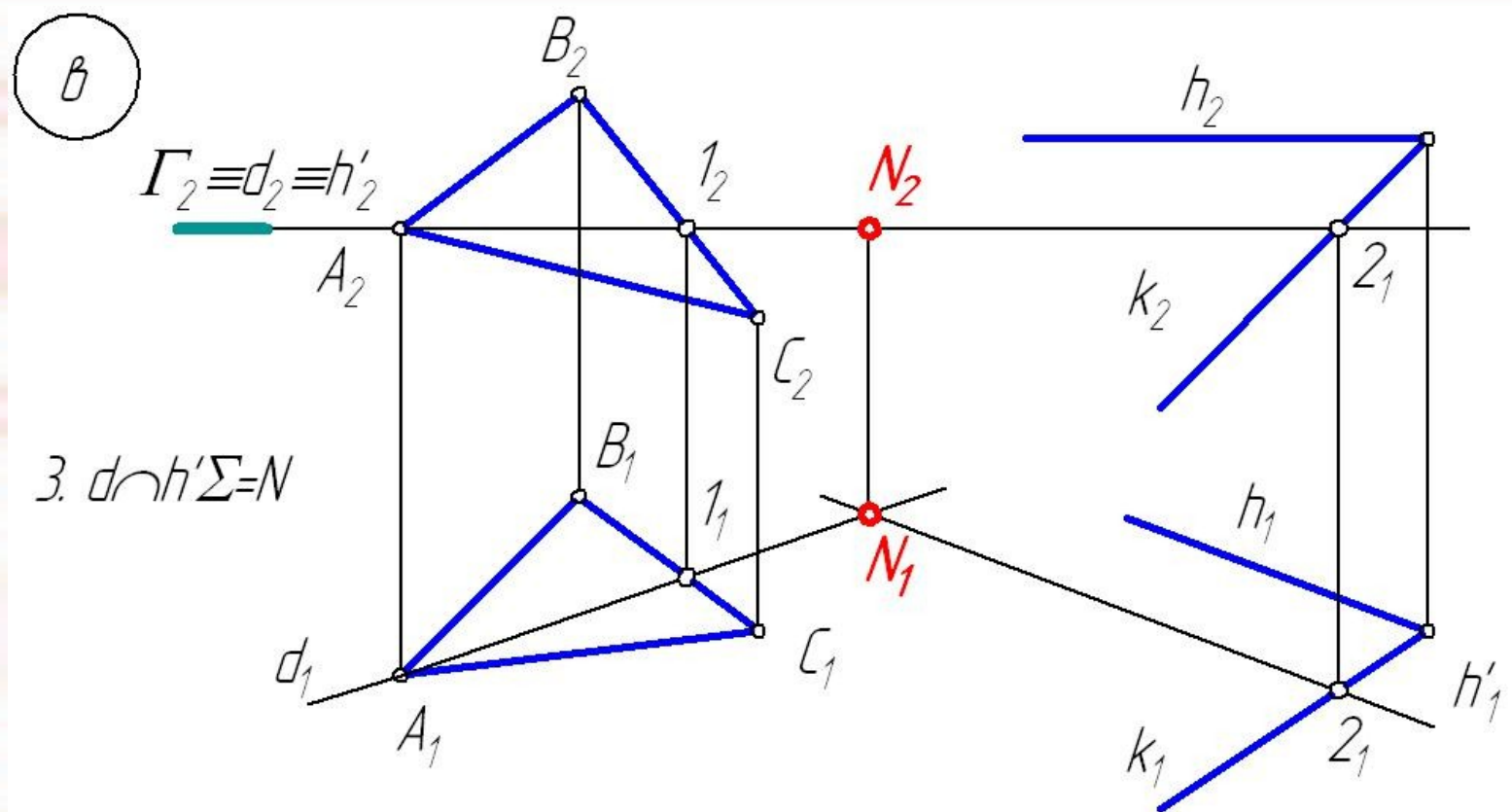
$$2) d \subset \Sigma \Rightarrow l \supset 1, A \in \Sigma$$

$$3) h' \cap \Theta \Rightarrow h' \supset 2 \in \Theta$$

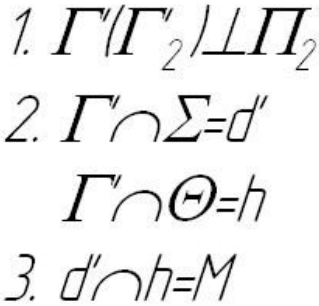
$$h' \parallel h \subset \Theta$$



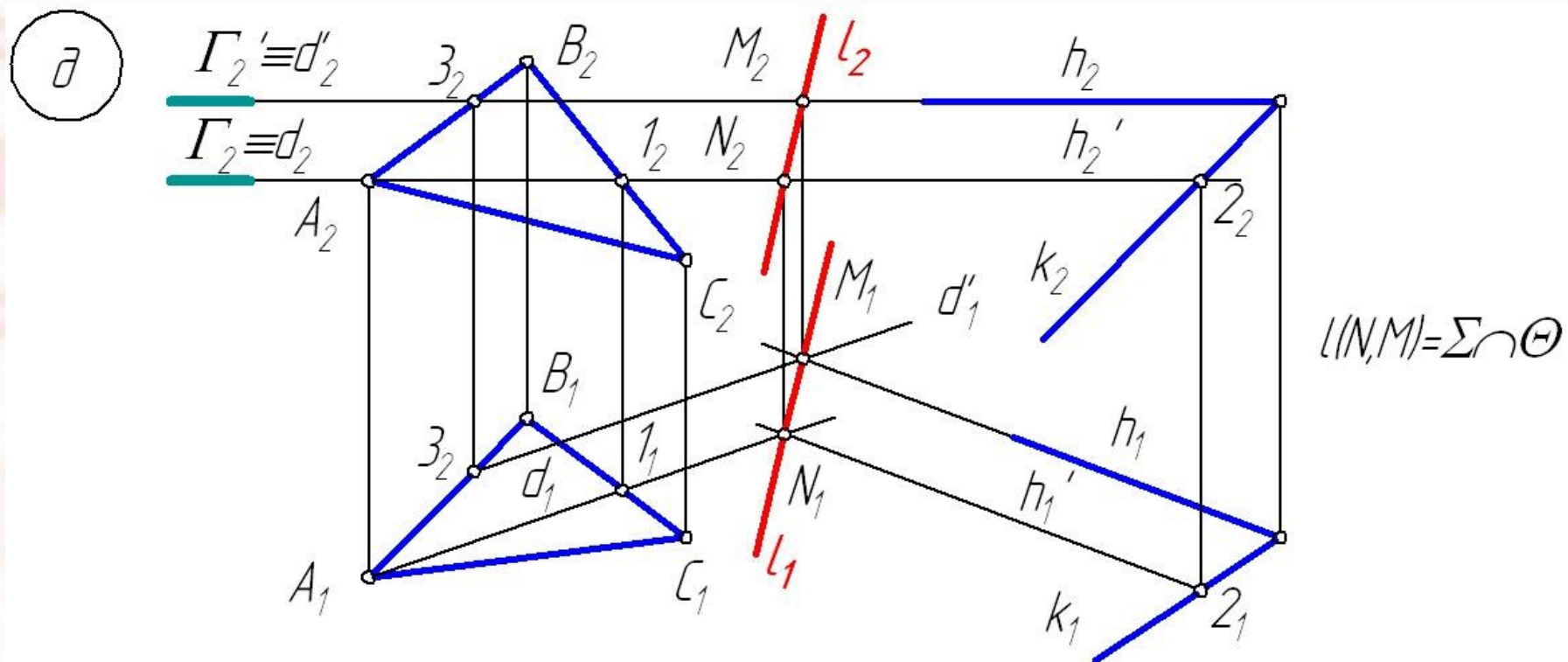
Вспомогательная плоскость Γ пересекает плоскость Σ по прямой d , а плоскость Θ по прямой h' .
Т.к. данные прямые принадлежат плоскости Γ , перпендикулярной фронтальной плоскости проекций, их фронтальные проекции совпадают с ее фронтальным следом. Горизонтальные проекции линий пересечения находятся исходя из признака принадлежности прямой плоскости.



Общая точка пересекающихся плоскостей (точка N) – точка пересечения линий пересечения плоскостей. Сначала определяется ее горизонтальная проекция, затем фронтальная проекция, лежащая на следе дополнительной плоскости.



Вторая точка (точка M) линии пересечения плоскостей определяется аналогично точке N с помощью дополнительной плоскости Γ'



Линия пересечения плоскостей (прямая l) проходит через точки N и M

Взаимное положение прямой и плоскости

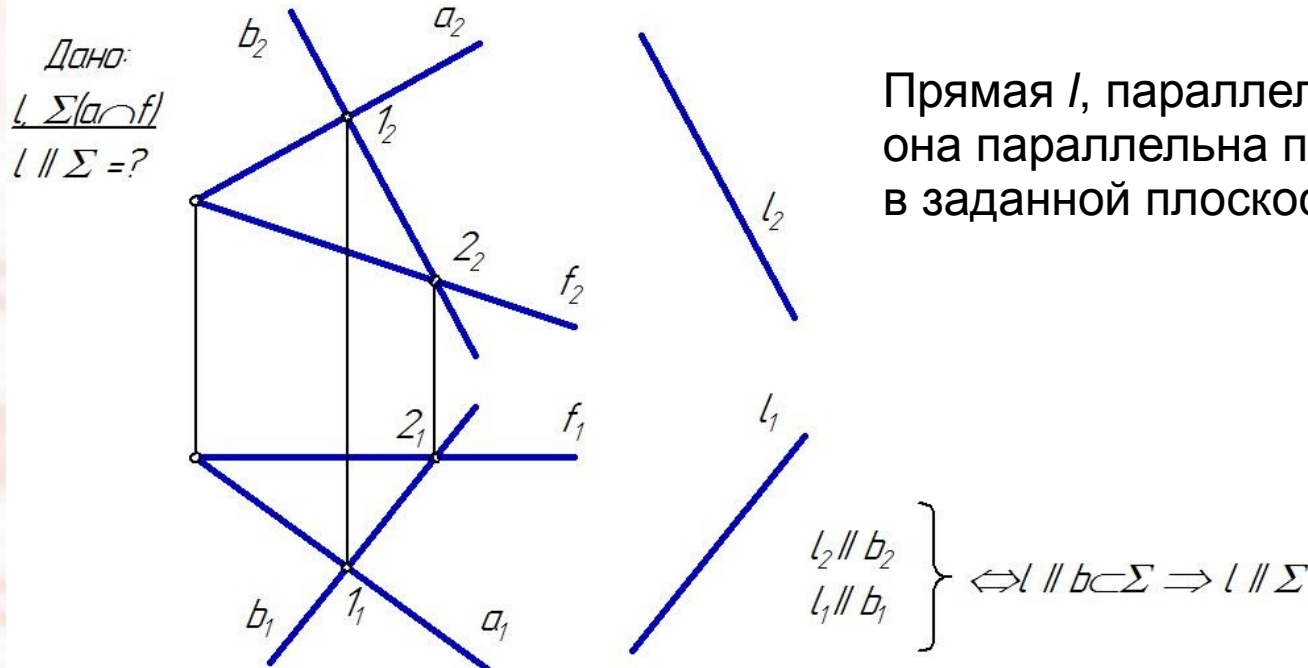
Прямая относительно плоскости может занимать три положения:

- принадлежать плоскости;
- быть параллельной плоскости;
- пересекать плоскость.

Параллельность прямой и плоскости

Признак параллельности прямой и плоскости:

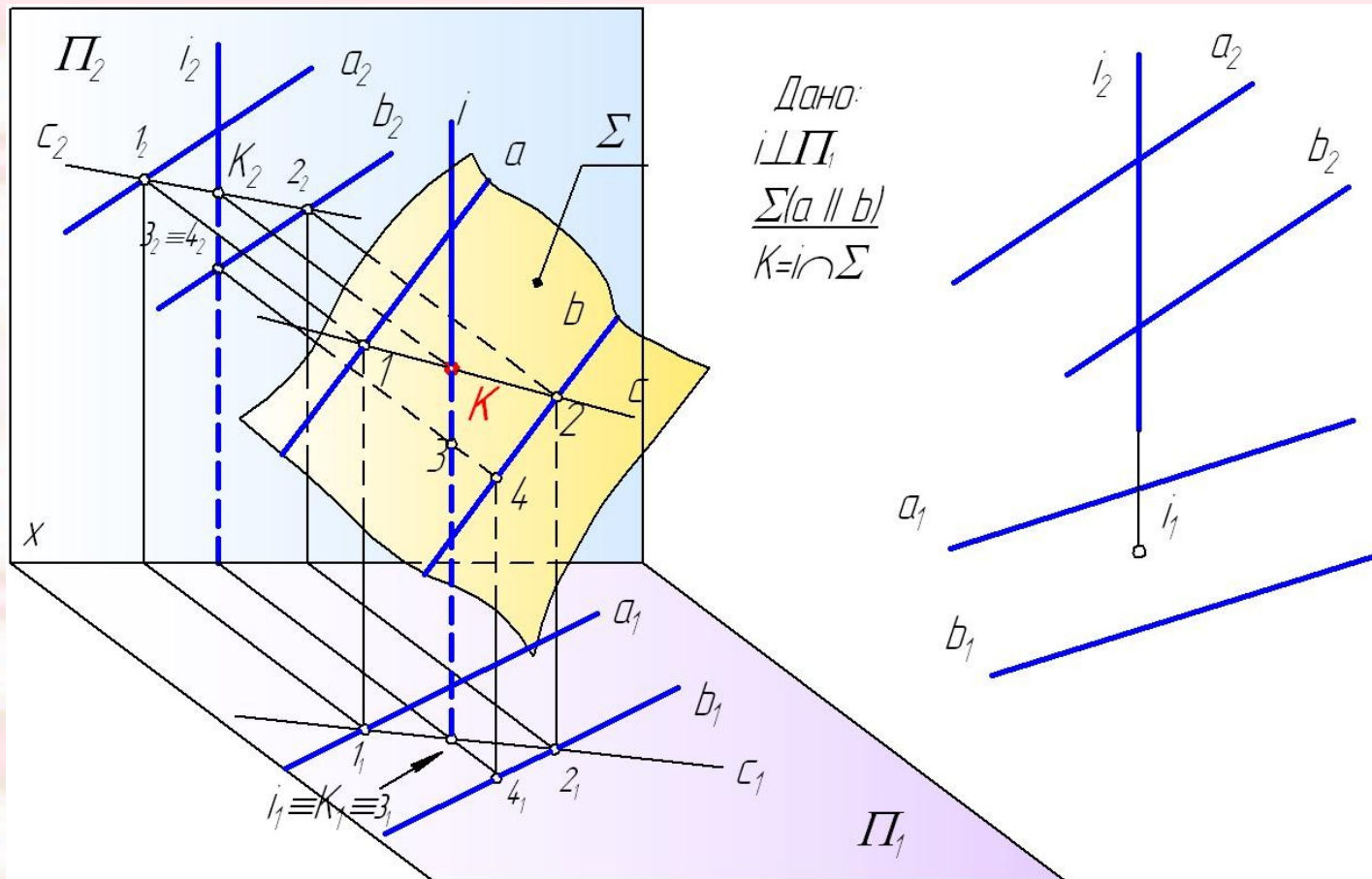
Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости.



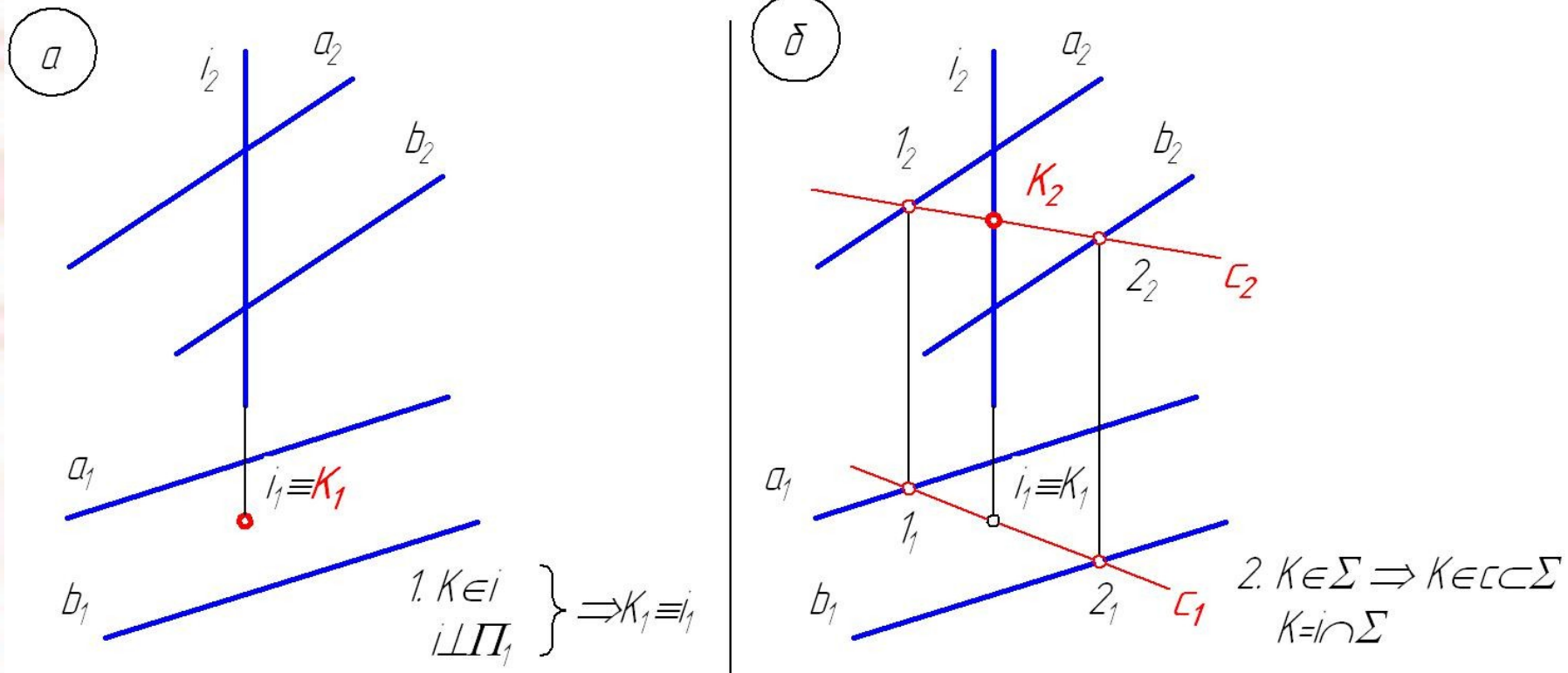
Пересечение прямой и плоскости

Частные случаи

Пример 1. Пересекаются проецирующая прямая и плоскость общего положения



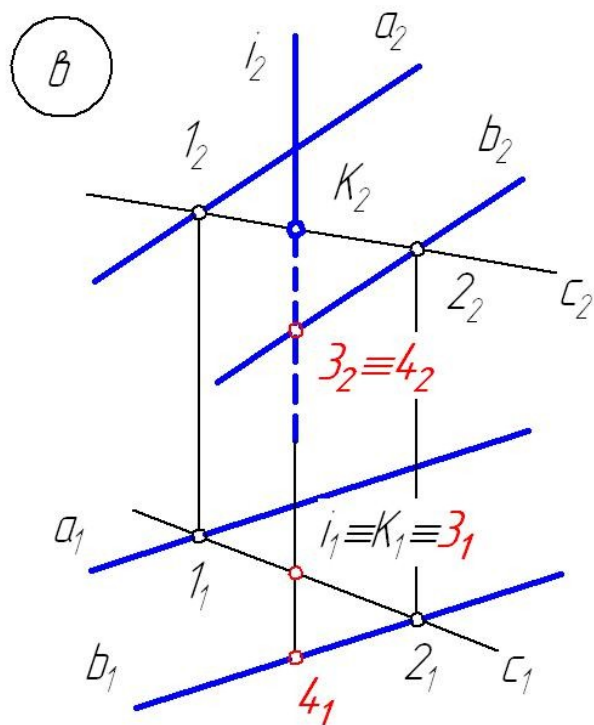
Последовательность нахождения точки пересечения



Точка пересечения прямой с плоскостью (точка K) должна одновременно принадлежать и прямой, и плоскости.

- а) Горизонтальная проекция точки пересечения находится из условия принадлежности ее прямой i : все точки, лежащие на горизонтально-проецирующей прямой, совпадают с ее горизонтальным следом.
- б) Фронтальная проекция точки находится из условия принадлежности точки K плоскости (с помощью прямой ϵ , принадлежащей плоскости).

Определение видимости прямой относительно плоскости



Видимость на Π_2 :

$$3_2 \equiv 4_2$$

$$3 \in i, 4 \in b \subset \Sigma$$

$$y_3 < y_4 \Rightarrow 3 \text{ не видна} \Rightarrow [3, K] \text{ не виден}$$

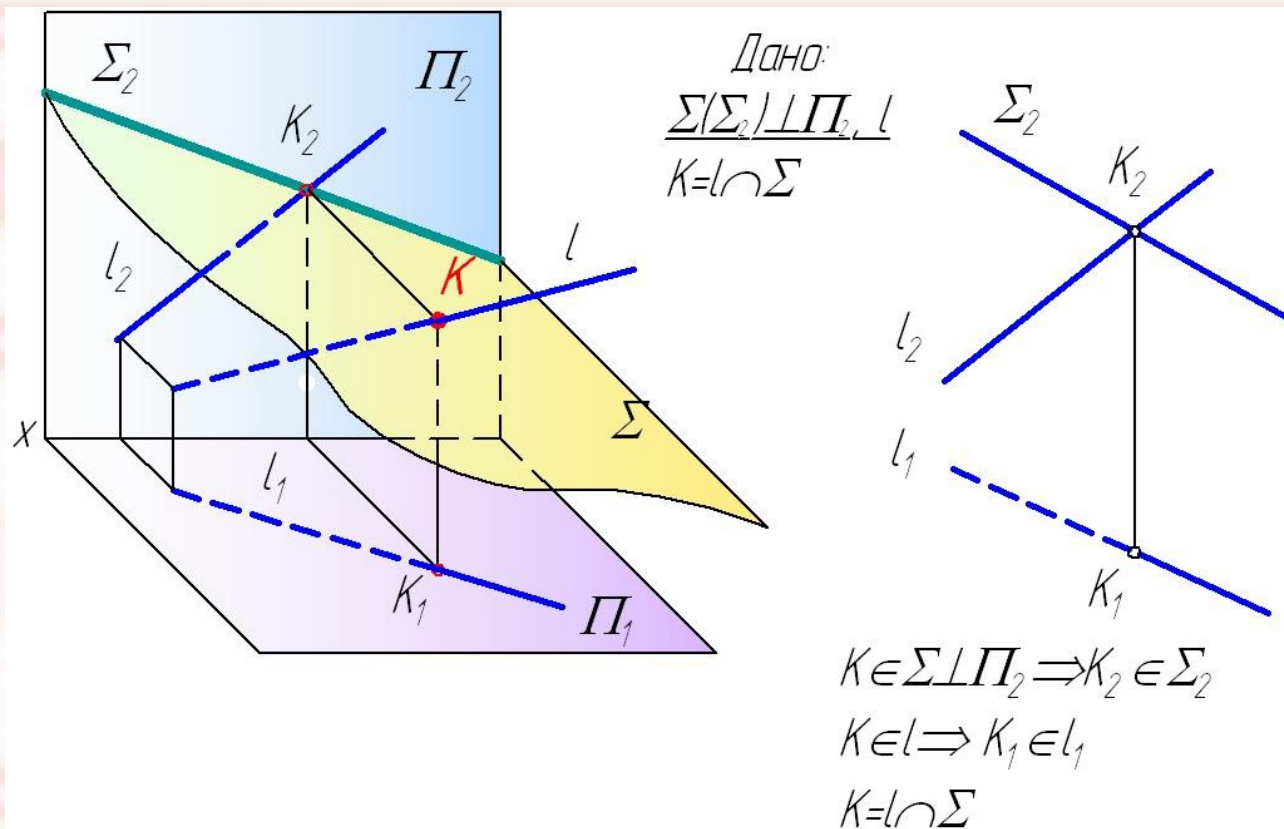
Точка K делит прямую i на два луча.

Какой луч находится перед/над плоскостью определяется методом конкурирующих точек.

Берутся две точки, лежащие на одном проецирующем луче, перпендикулярном Π_2 , принадлежащие прямой i и прямой, лежащей в плоскости (точки 3 и 4).

Точка 3 принадлежит прямой i , точка 4 – прямой b . Их фронтальные проекции совпадают, а при сравнении горизонтальных проекций видно, что точка 3 имеет меньшую координату по оси y . Значит эта точка находится за плоскостью, и луч, проходящий через нее, не виден.

Пример 2. Пересекаются прямая общего положения и проецирующая плоскость, заданная следом.



Прямая l пересекает фронтально проецирующую плоскость.

В этом случае фронтальная проекция точки пересечения лежит на следе плоскости.

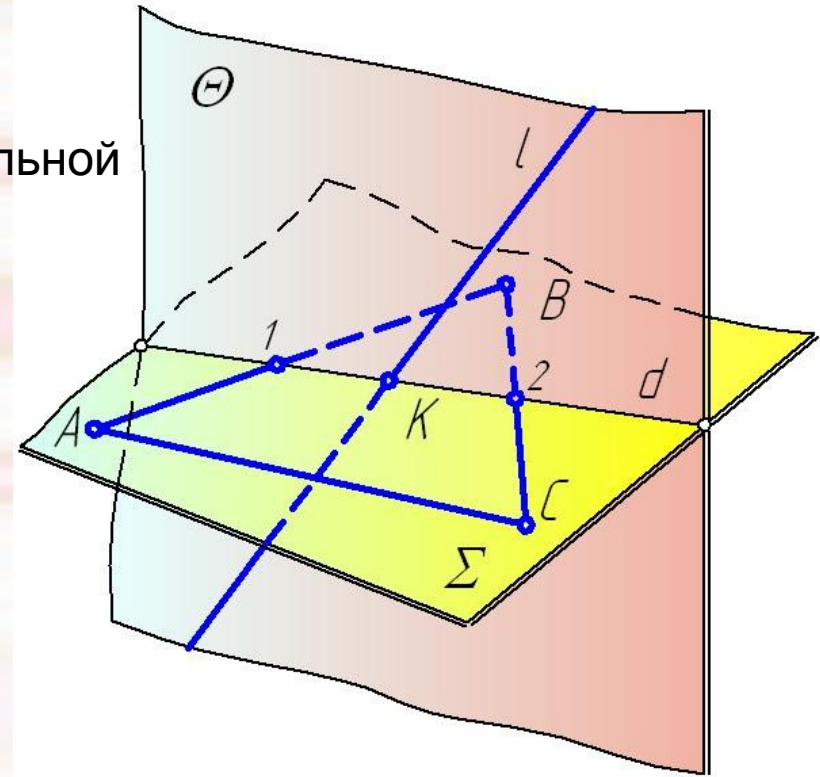
Нахождение горизонтальной проекции точки пересечения сводится к задаче на принадлежность точки прямой l .

Общий случай

Задача решается с помощью вспомогательной секущей плоскости.

Условия, накладываемые на вспомогательную плоскость:

- плоскостью частного положения;
- проходит через заданную прямую.

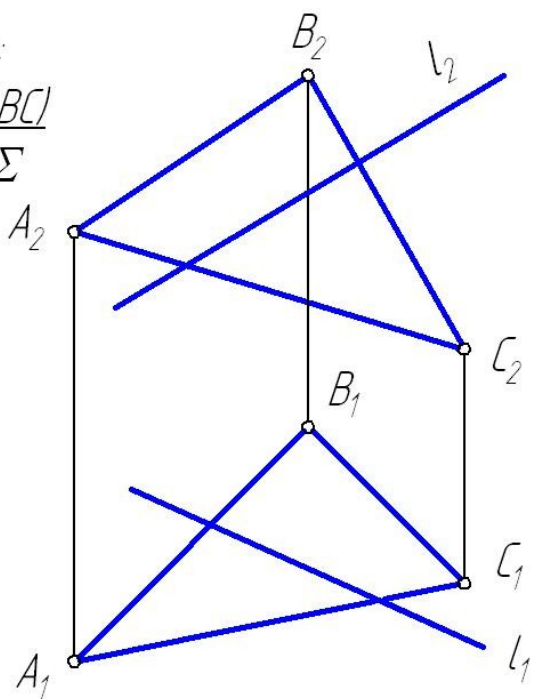


Алгоритм нахождения точки пересечения прямой с плоскостью:

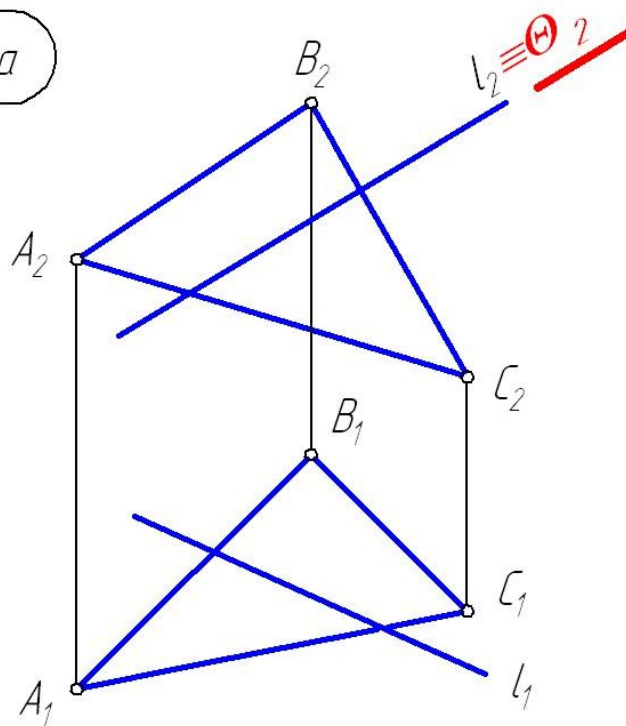
- 1) Через прямую l проводится вспомогательная плоскость частного положения.
- 2) Определяется линия пересечения вспомогательной плоскости с заданной плоскостью (ABC).
- 3) На пересечении линии пересечения плоскостей $d(1,2)$ с заданной прямой находится точка K , являющаяся искомой точкой.

Пример 2. Пересекаются прямая общего положения и плоскость общего положения.

Дано:
 $l, \Sigma(\Delta ABC)$
 $K = l \cap \Sigma$

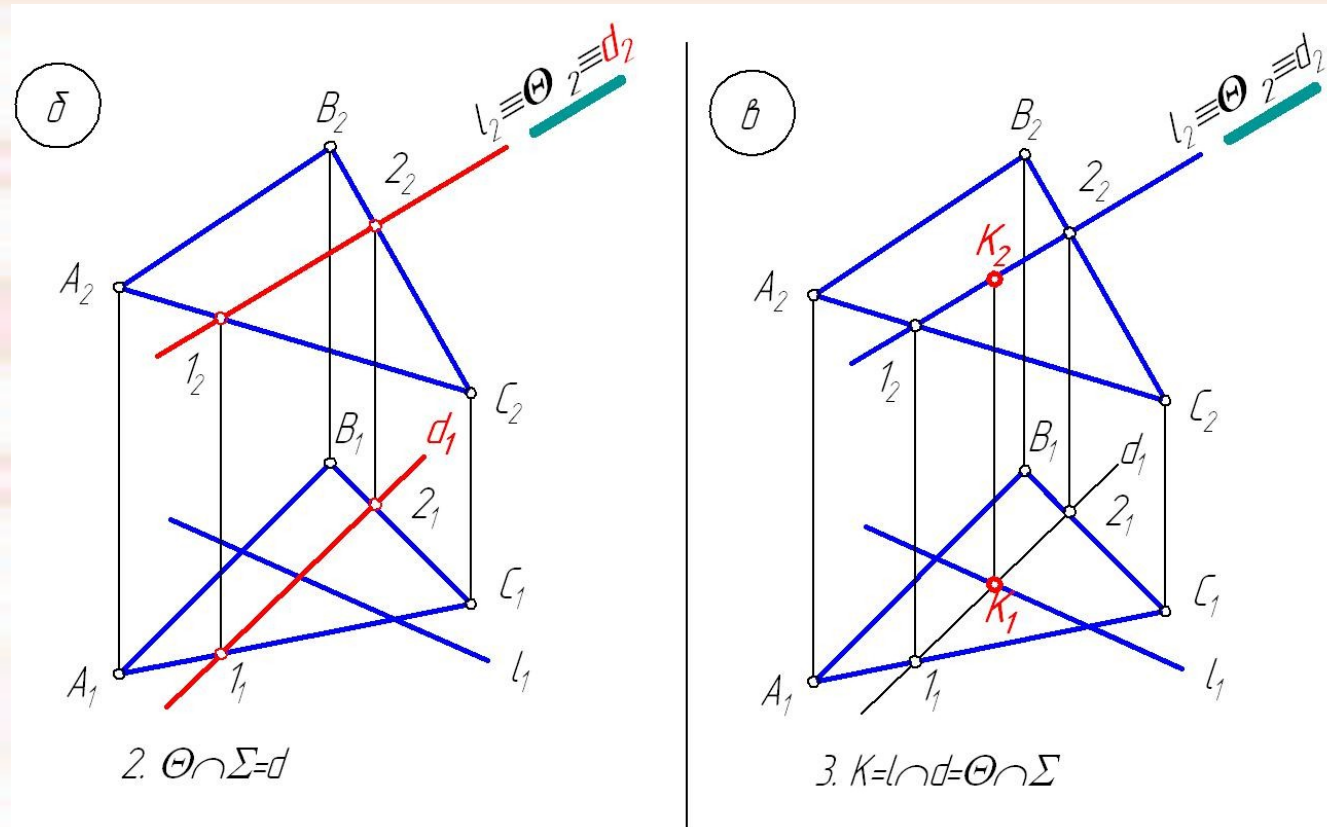


(a)

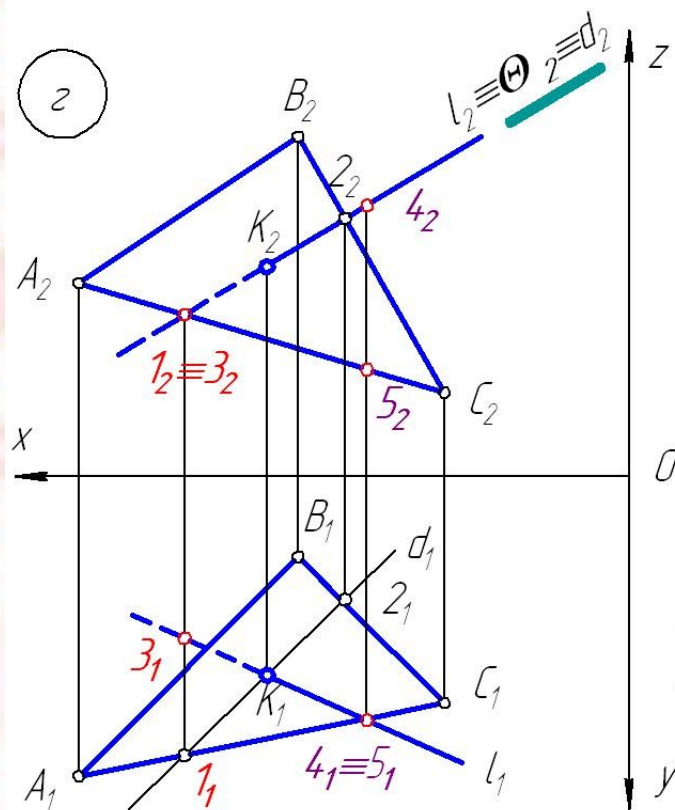


1. $l \subset \Theta(\Theta_2) \perp \Pi_2$

Прямая заключается во фронтально-проецирующую плоскость Θ



- Рис. б. Вспомогательная плоскость пересекает заданную по прямой d .
 Фронтальная проекция линии пересечения плоскостей определяется по принадлежности ее вспомогательной проецирующей плоскости (совпадает с ее фронтальным следом).
 Горизонтальная проекция линии пересечения определяется исходя из принадлежности ее заданной плоскости.
- Рис. в. Определяется точка пересечения прямой l с линией пересечения плоскостей d - точка K .



Видимость на Π_2 :

1, 3 – к.т.

$1 \in \Sigma, 3 \in l, y_1 > y_3 \Rightarrow (3, K)$ не виден

Видимость на Π_1 :

4, 5 – к.т.

$5 \in \Sigma, 4 \in l, z_4 > z_5 \Rightarrow (4, K)$ виден

Относительно Π_1

- 1) Конкурирующие точки 4 и 5. Точка 4 принадлежит прямой, точка 5 плоскости (отрезку AC).
- 2) Сравниваются их фронтальные проекции: точка 4 имеет большую координату по оси z, значит она, и вместе с ней луч, через нее проходящий, находятся над плоскостью.

Определение видимости прямой относительно Π_2

- 1) Выбраны конкурирующие точки 1 и 3. Точка 1 принадлежит плоскости (отрезку AC), точка 3 находится на прямой l.
- 2) Сравниваются их горизонтальные проекции. Т.к. точка 3 имеет меньшую координату по оси y, она находится за плоскостью. Луч прямой l, проходящий через эту точку не виден.